

Analiza matematyczna II

Zestaw V

Zadanie 1. Wyznaczyć dywergencję i rotację pola wektorowego

$$F(x, y, z) = (xy, yz^2, x^2yz).$$

Czy jest ono bezźródłowe lub bezwirowe?

Zadanie 2. Zamienić kolejność całkowania w całce iterowanej

1)

$$\int_0^2 \left(\int_x^{2x} f(x, y) dy \right) dx,$$

2)

$$\int_0^4 \left(\int_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x, y) dy \right) dx,$$

3)

$$\int_{-2}^2 \left(\int_{x-4}^{-2+\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy \right) dx,$$

4)

$$\int_0^1 \left(\int_0^{x^2} f(x, y) dy \right) dx,$$

Zadanie 3. Wprowadzając współrzędne sferyczne obliczyć całkę

1)

$$\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \quad \text{gdzie } V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\},$$

2)

$$\iiint_V \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz \quad \text{gdzie } V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\},$$

3)

$$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz \quad \text{gdzie } V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \leq 0\},$$

4)

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz \right) dy \right) dx.$$

Zadanie 4. Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć całkę

1)

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \quad \text{gdzie } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4y \leq 0\},$$

2)

$$\iint_D \frac{1}{(1 - x^2 - y^2)^2} dx dy, \quad \text{gdzie } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq x, x^2 + y^2 \leq y\},$$

3)

$$\iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) dx dy, \quad \text{gdzie } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\},$$

4)

$$\iint_D \frac{y}{x} dx dy, \quad \text{gdzie } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, 0 \leq y \leq x\},$$

5)

$$\iiint_V 2z dx dy dz, \quad \text{gdzie } V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1, y \geq 0\}.$$

Zadanie 5. Wprowadzając współrzędne walcowe obliczyć całkę

1)

$$\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz, \quad \text{gdzie } V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 8\},$$

2)

$$\iiint_V x^2 dx dy dz, \quad \text{gdzie } V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 9 - x^2 - y^2\},$$

3)

$$\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz, \quad \text{gdzie } V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz\},$$

4)

$$\iiint_V z dx dy dz, \quad \text{gdzie } V \text{ jest walcem o podstawie } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\} \text{ i o wysokości } H.$$

Zadanie 6. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi

- 1) $y = x^2 - 2x, y = 3x,$
- 2) $y = 2x + 2, y = \frac{4}{x}, y = \sqrt{x} - 1, x = 0.$

Zadanie 7. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami

- 1) $y = 1, y = 5, z = 7 - x^2, z = -2,$
- 2) $x = 0, y = 2x, y = 1, z = 0,$
- 3) $z = 4 - x^2 - y^2, 2z = 2 + x^2 + y^2.$

Zadanie 8. Obliczyć całkę

1)

$$\iiint_V y \cos(x + z) dx dy dz, \quad \text{gdzie } V : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq z \leq -x + \frac{\pi}{2},$$

2)

$$\iiint_V (1 - 4x + 6y^2) dx dy dz, \quad \text{gdzie } V : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3.$$

Zadanie 9. Obliczyć całkę w obszarze D ograniczonym przez krzywe

1)

$$\iint_D (x + 1) dx dy, \quad \text{gdzie } D : xy = 1, x = 1, x = 2, y = 0,$$

2)

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy, \quad \text{gdzie } D : xy = 1, x = 2, y = x,$$

3)

$$\iint_D (x + 2y) dx dy, \quad \text{gdzie } D : y = -\sqrt{x}, y = -2\sqrt{x}, 1 \leq x \leq 4,$$

4)

$$\iint_D (x + y) dx dy, \quad \text{gdzie } D : x = 0, x + y = 1, x - y = 1.$$

Zadanie 10. Policzyc całkę

$$\iint_D (x + y) dx dy, \quad \text{gdzie } D : 2 \leq 2x + y \leq 3, -1 \leq x - y \leq 1,$$

sprowadzając ją najpierw do całki po obszarze normalnym.