

# Analiza matematyczna II

## Zestaw IV

**Zadanie 1.** Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji  $(x, y) \mapsto \sin(x^2 + y)$  w punkcie  $(0, \pi)$ .

**Zadanie 2.** Znaleźć gradient funkcji  $f$  zadanej wzorem

1)  $f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$

2)  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{\ln(\sqrt{x^2 + y^2})}$

3)  $f(x, y) = \arcsin(x^2 + y^2)$

4)  $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$

**Zadanie 3.** Obliczyć pochodne cząstkowe rzędu drugiego funkcji  $f$  zadanej wzorem

1)  $f(x, y) = \sin^2(2x + y)$

2)  $f(x, y) = \ln(x^2 + y)$

3)  $f(x, y) = e^{xe^y}$

4)  $f(x, y) = x^y$

**Zadanie 4.** Obliczyć pochodną kierunkową funkcji  $(x, y) \mapsto f(x, y) = (x + 2y)^2$  w punkcie  $a = (2, 1)$  w kierunku wektora  $h = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

1) z definicji pochodnej kierunkowej,

2) ze wzoru

$$d_a f(h) = \langle \nabla_a f, h \rangle.$$

**Zadanie 5.** Dlaczego nie możemy obliczyć pochodnej kierunkowej funkcji  $(x, y) \mapsto f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + 8y^3}$  w punkcie  $a = (0, 0)$  w kierunku wektora  $\hat{h} = (1, 1)$  (któremu odpowiada wektor  $h = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ) korzystając z jej związku z gradientem, tj. za pomocą wzoru

$$d_a f(h) = \langle \nabla_a f, h \rangle?$$

Czy z tego wynika, że pochodna ta nie istnieje?

**Zadanie 6.** Dla funkcji  $(x, y) \mapsto f(x, y) = x^2 y - 2x - y$  znaleźć

1) gradient,

2) punkty krytyczne,

3) wektor wskazujący kierunek najszybszego wzrostu w punkcie  $(3, 1)$ ,

4) pochodną kierunkową w punkcie  $(3, 1)$  w kierunku  $\left(\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4}\right)$ .

**Zadanie 7.** Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej do sfery  $x^2 + y^2 + z^2 = 29$  w punkcie  $(2, 3, 4)$ .

**Zadanie 8.** Wyznaczyć 3 pierwsze wyrazy rozwinięcia funkcji  $f$  w szereg Taylora w otoczeniu punktu  $(0, 0)$ , dla  $f$  danej następująco

1)  $f(x, y) = e^x \sin y$     2)  $f(x, y) = e^x \ln(1 + y)$

**Zadanie 9.** Zastosować wzór Taylora przy  $n = 3$  do funkcji

1)  $f(x, y) = 2x^3 + y^2 + x^2y$     2)  $f(x, y) = e^{xy}$

**Zadanie 10.** Wyznaczyć różniczkę drugiego rzędu funkcji  $f$ , przy czym

1)  $f(x, y) = 2x^2y - 3xy^2$     2)  $\arctg(x^3 + 3y)$

**Zadanie 11.** Obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia

1)  $(2,01)^3(3,03)(4,02)^2$     2)  $\sqrt{(1,02)^3 + (1,97)^3}$

**Zadanie 12.** Znaleźć wartość największą i najmniejszą funkcji  $f$  danej wzorem

- 1)  $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$  w trójkącie domkniętym ograniczonym przez proste o równaniach  $x = 0, y = 0, x + y + 3 = 0$ ,
- 2)  $f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x$ , gdzie  $-3 \leq x$  oraz  $y \leq 3$ .

**Zadanie 13.** Zbadać ekstrema funkcji przyporządkowującej wektorowi  $(x, y)$  wartość

- 1)  $(12 - 3x - 4y)xy$     2)  $(12 - 3x - 4y)x^2y$
- 3)  $(12 - 3x - 4y)x^2y^2$     4)  $(4 - x^2 - y^2)(x - 2)$
- 5)  $(4 - x^2 - y^2)x$     6)  $(4 - x^2 - y^2)(x - 2)(y + 2)$

**Zadanie 14.** Zbadać ekstrema funkcji  $f$  danej wzorem

- 1)  $f(x, y) = (x + 3y - 5) \exp(-x^2 + y)$
- 2)  $f(x, y) = 3x^3 + 3x^2y - y^3 - 15x$
- 3)  $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + y^2 - 2x - y + 1$
- 4)  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$
- 5)  $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$