Analiza matematyczna II

Zestaw III

Zadanie 1. Dla danego wektora $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ możemy zadać normy różnymi wzorami, m.in.:

1) $\|x\|_1 := |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$,
2) $\|x\|_2 := \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2}$,
3) $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$,
4) $\|x\|_a := \big(|x_1|^a + |x_2|^a + \ldots + |x_n|^a\big)^{\frac{1}{a}}$, dla $a \geq 1$.

Wyznaczyć podane powyżej normy danego wektora:

1) $$(1, 2, 3)$$

2) $$(3, 2, -1)$$

3) $$(-2, -2)$$

4) $$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

5) $$\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

6) $$(-1, -1, 1)$$

7) $$(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n})$$

8) $$(\underbrace{1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0}_{n})$$

9) $$(\underbrace{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0}_{n})$$

Zadanie 2. Rozważmy zbiór $\mathbb{R}^2 = \{x = (x_1, x_2), x_i \in \mathbb{R}\}$, który jest przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Które z podanych funkcji **nie są** normą? Wyjaśnić, której własności normy nie mają:

1) $f(x_1, x_2) = |x_1 + x_2|$,
2) $f(x_1, x_2) = |x_1|$,
3) $f(x_1, x_2) = |x_1 x_2|$,
4) $f(x_1, x_2) = |x_1| + |x_2|$,
5) $f(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|}$.

Zadanie 3. Dla danych wektorów $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ wzór

$$\varphi(x, y) := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

zadaje iloczyn skalarny w przetrzeni $\mathbb{R}^n$. Wyznaczyć jego wartości dla podanych par wektorów:

1)
$$(1, 2, 3),\ (-1, 1, 0)$$

2)
$$(0, 7, 1),\ (e^{2021}, -1, 1)$$

3)
$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),\ (4, -6)$$

4)
$$\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right),\ \left(2, \frac{\log(83)}{\pi}, 3\right)$$

5)
$$(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}),\ (\underbrace{0, 0, \ldots, -1}_{n})$$

6)
$$(\underbrace{1, 0, \ldots, 1, 0}_{n}), (\underbrace{0, 1, \ldots, 0, 1}_{n})$$

Zadanie 4. Niech $x = (x_1, x_2)$ oraz $y = (y_1, y_2)$ będą dowolnymi wektorami z przetrzeni $\mathbb{R}^2$.

1) Pokazać, że funkcja
$$(x, y) \mapsto 3x_1y_1 + 5x_2y_2$$
jest iloczynem skalarnym w przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

2) Jak wygląda norma zadana przez ten iloczyn skalarny?

3) Narysować kulę jednostkową (tj. kulę o środku w $(0, 0)$ i promieniu 1) $B((0, 0), 1)$ w metryce generowanej przez ten iloczyn skalarny. Czy kula ta różni się od kuli jednostkowej w metryce euklidesowej w przestrzeni $\mathbb{R}^2$?

Zadanie 5. Dla wektorów

$$(1, 0), (0, 1)$$

obliczyć ich iloczyn skalarny, zadany wzorem:

1) $(x, y) \mapsto x_1y_1 + x_2y_2$,

2) $(x, y) \mapsto 3x_1y_1 + 5x_2y_2$.

Zadanie 6. Rozważmy funkcje $d_i : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto [0, \infty]$ określone następująco:

1) $d_1(n,m) = n + m$
2) $d_2(n,m) = |n - m|$
3) $d_3(n,m) = nm$
4) $d_4(n,m) = \min\{n,m\}$
5) $d_5(n,m) = \max\{n,m\}$

Które z par $(\mathbb{N}, d_i)$ są przestrzeniami metrycznymi?

Zadanie 7. Czy funkcja

1) $$d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$$

2) $$d(x,y) = |x-y|^3$$

zadaje metrykę w $\mathbb{R}$?

Zadanie 8. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$ oraz niech $x, y, z \in V$ będą takimi wektorami, że

$$\langle x, y \rangle = 2,\ \langle y, z \rangle = -3,\ \langle x, z \rangle = 5,$$

$$\|x\| = 1,\ \|y\| = 2,\ \|z\| = 7.$$

1) Obliczyć:

   1) $\langle x + y, y + z \rangle$, 2) $\langle 2x - z, 3x + 2z \rangle$, 3) $\langle x - y - 2z, 4x + y \rangle$.

2) Oszacować:

   1) $\|x + y\|$, 2) $\|2z - y\|$, 3) $\|x - 2y + 4z\|$.

Me after I write $\langle a|b \rangle$
instead of $\vec{a} \cdot \vec{b}$