Analiza matematyczna II

Zestaw II

Zadanie 1. Czy dla szeregu

1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n}$$

2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{2n^4+1}}$$

spełniony jest warunek konieczny zbieżności szeregu? Czy szereg ten jest zbieżny?

Zadanie 2. Korzystając z kryterium Cauchy'ego, zbadać zbieżność szeregu

$$1+\frac{3}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{3}{2^{2n+1}}+\ldots.$$

Czy kryterium d'Alemberta pozwala nam rozstrzygnąć zbieżność tego szeregu?

Zadanie 3. Korzystając z kryterium d'Alemberta, zbadać zbieżność szeregu

1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!}$$

3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{2^n}$$

4)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$$

5)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\pi^n}$$

6)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-10)^n}{4^{2n+1}(n+1)}$$

7)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(2n-1)!}$$

8)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{(-2)^{n+1}n}$$

9)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Zadanie 4. Czy szereg

1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

jest zbieżny? Czy kryterium d'Alemberta lub kryterium Cauchy'ego pozwala to rozstrzygnąć?

Zadanie 5. Stosując kryterium porównawcze Weierstrassa w wersji asymptotycznej, zbadać zbieżność szeregu

1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3+n-2}{2n^5-n+4}$$

2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+4^n}{2^n+5^n}$$

3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$$

4)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

5)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

6)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2}}$$

7)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$$

8)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^5+8}$$

9)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{\sqrt{n^5+4n^2+12}}.$$

Zadanie 6. Za pomocą kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregu

1)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln^n\left(10+\frac{1}{n}\right)$$

2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\cdot n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$$

3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{1+2n}}$$

4)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$$

5)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$$

6)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-3n^3}{7n^3+2}\right)^{n}$$

7)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+3^n}$$

8)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{2^n}$$

9)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\left(\frac{2n-7}{5n+2}\right)^{n}.$$

Zadanie 7. Korzystając z kryterium Dirichleta, wykazać zbieżność szeregu

1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n}$$

2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{3}}{\sqrt{n}}$$

3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2}{3}\pi n}{n}$$

4)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{6}}{n\sqrt{n}}.$$

Zadanie 8. Korzystając z kryterium Abela, uzasadnić zbieżność szeregu

1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{1}{n}$$

2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n(1-3^{2n})}$$

3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\frac{x}{n})^n}{2^n}$$

4)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$$

5)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2^n+1}$$

6)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+3n+1}{n^4+2n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^2} \right).$$

Czy w którymś z powyższych szeregów nie można było zastosować kryterium Dirichleta?

Zadanie 9. Korzystając z kryterium Leibniza, uzasadnić zbieżność szeregu

1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{3} - 1)$$

3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n^2+3}$$

4)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$$

5)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n}$$

6)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n\pi + \frac{\pi}{2})}{n\sqrt{n}}.$$

Czy w którymś z powyższych szeregów nie można było zastosować kryterium Dirichleta?

Zadanie 10. Wyznaczyć środek i przedział zbieżności szeregu potęgowego

1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

3) $$\sum_{n=0}^{\infty} n^n \cdot x^n$$

4) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 2^n \frac{(x+3)^n}{n}$$

5) $$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

6) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{4^n} (x+3)^n$$

7) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

8) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} (4x-8)^n$$

9) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

10) $$\sum_{n=0}^{\infty} n!(2x+1)^n$$

11) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{n^n}$$

12) $$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

13) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt[n]{n}}$$

14) (*) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

15) (*) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n \cdot 4^n}$$

Me: Mom, can we get e^x?

Mom: We have e^x at home.

e^x at home: $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$